Teorema di Gauss (I Parte)

1.I INTRODUZIONE.

Preliminarmente, si introdurrà la seguente definizione:

Flusso di un vettore $\underline{v}$ attraverso una superficie S. ([1])

Sia dato un ***campo vettoriale***, ovvero una funzione $\underline{v}$ che ad ogni punto $P \in \mathbf{R}^3$ e ad ogni istante t associa un ***vettore*** $\underline{v}(P, t) = \underline{v}(x, y, z, t)$ con $P(x, y, z)$. Nel caso in cui la funzione $\underline{v}$ non dipenda ***esplicitamente*** dal tempo t, ovvero che risulti

$$\underline{v}(P, t) = \underline{v}(x, y, z, t) = \underline{v}(P) \quad \forall t$$

si dirà che il campo vettoriale $\underline{v}$ è ***stazionario*** e, da adesso in poi, le considerazioni che si andranno a svolgere saranno relative ***esclusivamente*** a ***campi vettoriali stazionari.*** Ciò posto, sia data una "***piccola***" ([2]) superficie piana di area ΔS, la cui orientazione nello spazio sia individuata dal ***versore*** $\underline{n}$ ***normale a*** ΔS (Fig. 1).

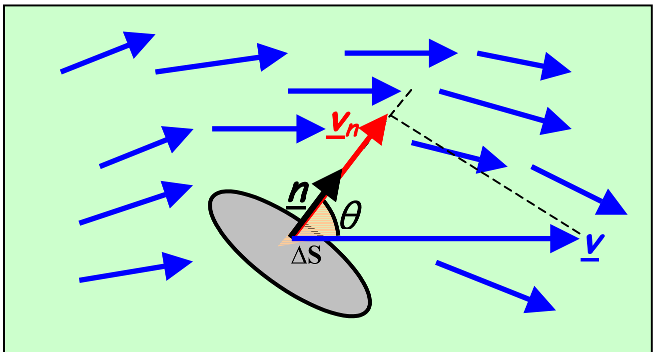


Figura 1

Si definisce ***flusso elementare di $\underline{v}$ attraverso*** ΔS la seguente grandezza :

Flusso elementare di $\underline{v}$ attraverso ΔS	$\Delta\Phi(\underline{v}) = \underline{v} \bullet \underline{n}\, \Delta S = \lvert\underline{v}\rvert\lvert\underline{n}\rvert \cos\theta\ \Delta S = \lvert\underline{v}\rvert \cos\theta\ \Delta S = v_n\, \Delta S \qquad (1.I)$

[1] La teoria dei campi vettoriali fu sviluppata in connessione con lo studio del moto dei fluidi, come rivela la terminologia adoperata. Il "***flusso di un vettore*** $\underline{v}$" va, allora, inteso solo nel senso di una ben definita grandezza scalare associata al campo vettoriale $\underline{v}$. Ad esempio, nel caso del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ "*niente di materiale*" fluisce attraverso le superfici considerate !

[2] Il termine è qui inteso nel senso che l'estensione di ΔS è talmente limitata da poter considerare $\underline{v}$ ***uniforme***, cioè ***costante*** in ***modulo, direzione e verso*** in ogni suo punto $P' \in \Delta S$.

Nella (1.I) la ***grandezza scalare*** v_n rappresenta ***la componente del vettore*** $\underline{\boldsymbol{v}}$ ***nella direzione di*** $\underline{\boldsymbol{n}}$ ***,*** ovvero la ***componente normale del vettore*** $\underline{\boldsymbol{v}}$***, cioè perpendicolare, alla superficie*** ΔS ([3]).

Una ***superficie qualunque S*** può essere considerata, allora, suddivisa in un grandissimo numero di superfici ΔS_1, ΔS_2, … , ΔS_m sufficientemente "*piccole*" (nel senso della Nota 1 !) tanto da ritenerle, con ottima approssimazione, piane e su ciascuna delle quali il ***campo vettoriale*** $\underline{\boldsymbol{v}}$ assume i valori costanti $\underline{\boldsymbol{v}}_1, \underline{\boldsymbol{v}}_2, \ldots, \underline{\boldsymbol{v}}_m$.

Più precisamente, considerata la ***generica "piccola" superficie elementare piana*** ΔS_i, orientata secondo il ***versore normale*** $\underline{\boldsymbol{n}}_i$ (con $i \in (1,2,3,\ldots, m)$), indicato con $\underline{\boldsymbol{v}}_i$ il comune valore su ΔS_i del ***campo vettoriale*** $\underline{\boldsymbol{v}}$, il quale forma un angolo θ_i con $\underline{\boldsymbol{n}}_i$ (Fig. 2), il ***flusso elementare*** $\Delta\Phi_i$ di $\underline{\boldsymbol{v}}$ attraverso ΔS_i è definito dalla seguente espressione

$$\Delta\Phi_i = \Delta\Phi(\underline{\boldsymbol{v}}_i) = \underline{\boldsymbol{v}}_i \bullet \underline{\boldsymbol{n}}_i \, \Delta S_i = |\underline{\boldsymbol{v}}_i||\underline{\boldsymbol{n}}_i| \cos\theta_i \, \Delta S_i = |\underline{\boldsymbol{v}}_i| \cos\theta_i \, \Delta S_i = v_{n,i} \, \Delta S_i \qquad (2.I)$$

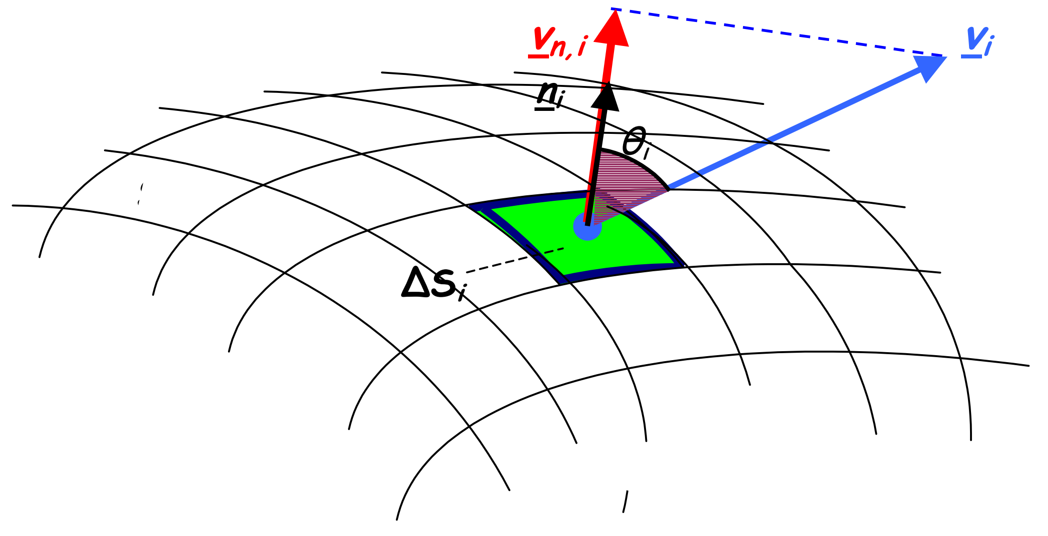


Figura 2

Il ***flusso totale*** $\Phi_S(\underline{\boldsymbol{v}})$ ***attraverso S*** sarà dato da :

$$\Phi_s(\underline{v}) = \sum_{i=1}^{m} \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^{m} \underline{v}_i \bullet \underline{n}_i \, \Delta S_i = \sum_{i=1}^{m} |\underline{v}_i| \cos\vartheta_i \, \Delta S_i = \sum_{i=1}^{m} v_{n,i} \Delta S_i \qquad (3.I)$$

[3] Vedi Appendice I.

Osservazione I: Si noti che

$$\underline{v} = \underline{0} \quad \forall P \in \mathbf{S} \Rightarrow \Phi_S(\underline{v}) = 0 \qquad \text{ma} \quad \Phi_S(\underline{v}) = 0 \not\Rightarrow \underline{v} = \underline{0} \quad \forall P \in \mathbf{S}$$

Infatti, il flusso elementare $\Delta\Phi_i$, in quanto ***grandezza algebrica***, può assumere valori discordi in vari punti di **S** in modo da rendere nullo il ***flusso totale*** $\Phi_S(\underline{v})$ senza che, ***necessariamente***, $\underline{v} = \underline{0}$ $\forall P \in \mathbf{S}$.

2.I IL TEOREMA DI GAUSS (TDG) PER LE INTERAZIONI ELETTRICHE.

Va, innanzitutto, precisato che

Il teorema di Gauss (TdG) costituisce una proprietà globale di qualsiasi campo vettoriale $\underline{v}$ che decresca con l'inverso del quadrato della distanza.

Pertanto, esso è valido anche nel caso della ***interazione gravitazionale***.

Osservazione II : Il termine "***globale***" sta ad indicare che il flusso rappresenta una proprietà di un dato ***campo vettoriale*** valutata sul ***contorno di un generico volume spaziale*** ed è adoperato in contrapposizione con il termine "***locale***" che si riferisce, piuttosto, ***ad un generico intorno di un punto.***

Esso è stato formulato da **Carl Friedrich Gauss** nel 1839, con riferimento specifico al campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ (4) contenuto in una regione di spazio nella quale è immersa una ***superficie chiusa S qualsiasi***, ed ha il seguente enunciato:

TEOREMA DI GAUSS :

" Il flusso $\Phi_S(\underline{\mathbf{E}})$ del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$, nel vuoto, attraverso una qualunque superficie chiusa S che racchiuda una carica elettrica Q_{int} è pari a $4\pi k_o Q_{int}$."

In simboli:

$$\Phi_S(\underline{\mathbf{E}}) = 4\pi k_o Q_{int} \qquad (4.I)$$

[4] Si ritornerà nel seguito sulla questione dell'origine del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ contenuto nel ***TdG***.

dove

$$\Phi_s(\underline{E}) = \sum_{i=1}^{m} \underline{E}_i \bullet \underline{n}_i \;\; \Delta S_i \; = \sum_{i=1}^{m} |\underline{E}_i| \cos\vartheta_i \; \Delta S_i \; = \sum_{i=1}^{m} E_{n,i} \Delta S_i \qquad (4'.I)$$

$\Phi_S(\underline{\mathbf{E}})$ è il flusso del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ attraverso la ***superficie chiusa S*** ;
S è una ***qualsiasi superficie chiusa*** che racchiude $\mathbf{Q}_{int}$;
$\mathbf{Q}_{int}$ è la ***carica elettrica totale*** racchiusa all'interno di **S**;
$\underline{n}_i$ versore normale ad S in P (generalmente orientato verso l'esterno di **S**).

Osservazione III : qual è il campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ al quale si riferisce l'enunciato del ***TdG***? Nella dimostrazione (riportata in Appendice 1) il campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ è prodotto da $\mathbf{Q}_{int}$, tuttavia tale ipotesi può essere generalizzata alla luce del seguente corollario, che discende immediatamente dalla (4.I):

$$\textit{Se} \quad \mathbf{Q}_{int} = 0 \quad \textit{allora} \quad \Phi_S(\underline{\mathbf{E}}) = 0$$

Ma, dall'Osservazione I

$$\Phi_S(\underline{\mathbf{E}}) = 0 \;\not\Rightarrow\; \underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{0}} \quad \forall P \in \mathbf{S}$$

pertanto

$$\mathbf{Q}_{int} = 0 \;\Rightarrow\; \Phi_S(\underline{\mathbf{E}}) = 0 \;\not\Rightarrow\; \underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{0}} \quad \forall P \in \mathbf{S}$$

Tale circostanza sta a significare che cariche esterne alla superficie **S**, pur influenzando **<u>localmente</u>** il valore di $\underline{\mathbf{E}}$, non sono in grado di alterare **<u>globalmente</u>** il valore di $\Phi_S(\underline{\mathbf{E}})$. A quest'ultimo contribuiscono, invece, soltanto le cariche $\mathbf{Q}_{int}$ contenute in **S**. In definitiva, il campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ che compare nella (4.I) è quello presente sulla superficie chiusa **S**, **<u>qualunque ne siano le cariche sorgenti (esterne o interne ad S)</u>**, tuttavia contribuirà a $\Phi_S(\underline{\mathbf{E}})$ **<u>esclusivamente</u>** il campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ prodotto dalla carica $\mathbf{Q}_{int}$ in essa contenuta.

3.I APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI GAUSS.

Il ***teorema di Gauss*** (***TdG***) è di notevole utilità per:

1. calcolare il ***modulo*** |**E**| del campo elettrico **E** prodotto da una distribuzione di carica quando essa è dotata di ***particolari simmetrie*** (assiale, centrale), e quindi determinare **E** quando ne siano stati individuati "per altra via" la ***direzione*** ed il ***verso*** ;
2. determinare la quantità di carica contenuta in una superficie chiusa se è noto il campo elettrico su tale superficie.

Limitandosi, per il momento, al punto 1., la procedura di applicazione delle (4.I) e (4'.I) per la determinazione di |**E**| in un dato punto P consiste, in genere, nei seguenti passi:

- tenendo conto di eventuali simmetrie della distribuzione di carica sorgente, si cerca di determinare la ***direzione*** ed il ***verso*** del campo elettrico **E** nel generico punto P ;
- successivamente, si prova ad individuare ***un'opportuna superficie S passante per*** P sulla quale |**E**| sia ***costante*** ed $\underline{E}_i \parallel \underline{n}_i$ oppure $\underline{E}_i \perp \underline{n}_i$ (può accadere che in alcuni punti di S risulti $\underline{E}_i \parallel \underline{n}_i$, mentre in altri punti di S si ha $\underline{E}_i$ $\underline{n}_i$);
- su tale superficie **S** la (4'.I) assume la forma:

$$\Phi_s(\underline{E}) = \sum_{i=1}^{m} \underline{E}_i \bullet \underline{n}_i \; \Delta S_i = \sum_{i=1}^{m} E_{n,i} \Delta S_i = E \sum_{i=1}^{m} \Delta S_i = E\, S \qquad (4''')$$

  dove **E** coincide con la ***componente di*** **E** ***perpendicolare ad S nel generico punto*** P (**positiva** se **E** è concorde con **n**, **negativa** se **E** è **discorde** con **n**).
- sostituita la (4'''.I) così ottenuta nella (4.I), si ottiene |**E**| per inversione.

Nel seguito si determinerà il modulo |**E**| del campo elettrico mediante l'applicazione del ***TdG*** a notevoli distribuzioni di carica:

a) ***Campo elettrico di una carica puntiforme;***
b) ***Campo elettrico di un guscio sferico uniformemente carico;***
c) ***Campo elettrico di una sfera piena uniformemente carica;***

a) *Campo elettrico di una carica puntiforme.*

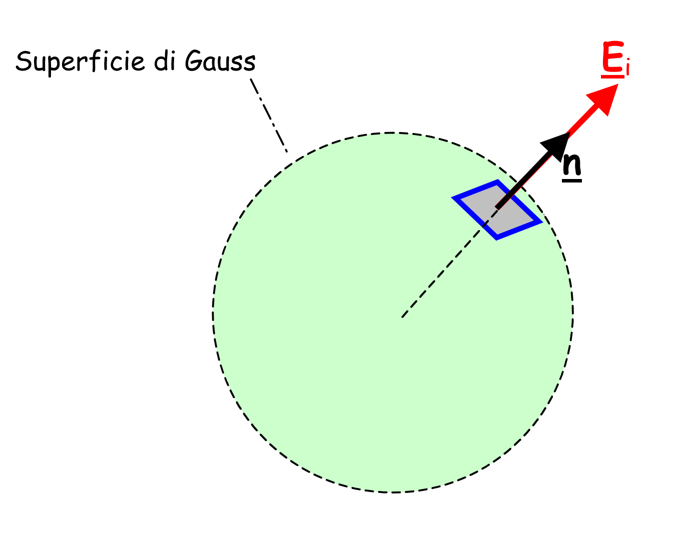


Figura 3

Sia **Q** una carica elettrica puntiforme (per esempio positiva) posta in un punto O. Il campo elettrico $\underline{E}$ da essa prodotto ha simmetria sferica, pertanto risulterà di modulo costante sulla superficie di qualunque sfera di centro O e raggio r, con verso uscente e direzione perpendicolare in ogni punto alla superficie stessa della sfera considerata.

Pertanto, in ogni punto della sfera **S** si avranno $\underline{E}_i$ ed $\underline{n}_i$ **concordi** e, quindi:

$$\underline{E}_i \parallel \underline{n}_i \Rightarrow \underline{E}_i \bullet \underline{n}_i = E_{n,i} = |\underline{E}|$$

e la (4".I) diventa

$$\Phi_S(\underline{E}) = |\underline{E}| \times S = 4\pi r^2 |\underline{E}|$$

Dalla (4.I) si ha allora

$$4\pi r^2 |\underline{E}| = 4\pi k_o Q$$

ed infine, nell' ipotesi più generale di una carica sorgente puntiforme **Q** arbitraria, si ha:

Campo elettrico di una ***carica puntiforme*** **Q**: (in un punto P dello spazio)	$|\underline{E}(P)| = k_o |Q| / r^2$ (5.I)

b) *Campo elettrico di un guscio sferico uniformemente carico.*

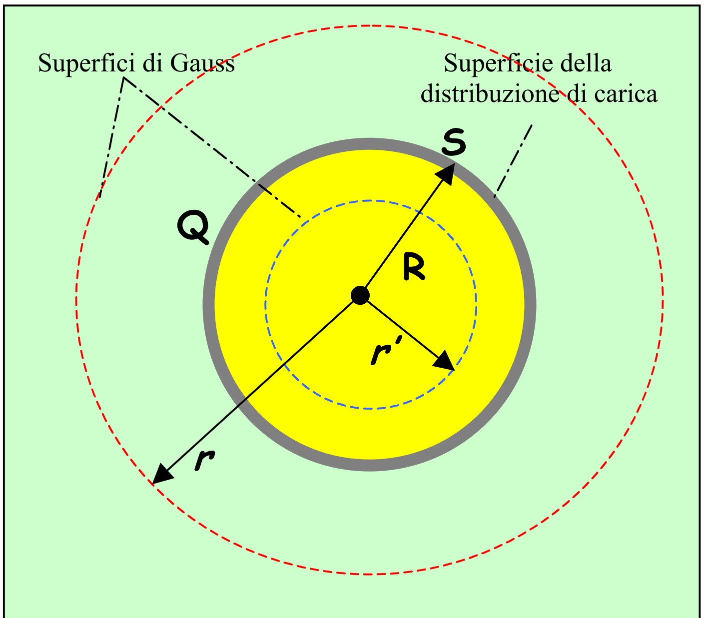


Figura 4

Sia **Q** una carica elettrica (per semplicità positiva) distribuita ***uniformemente*** su un ***guscio sferico di raggio*** **R**. Introdotta la grandezza scalare ***densità di carica elettrica superficiale*** σ data dalla relazione

$$\sigma = \Delta Q / \Delta S \qquad (6.I)$$

definita come la quantità di carica ΔQ distribuita sulla superficie elementare ΔS ($[\sigma] = [C\ m^{-2}]$), si ha, a causa della ***costanza di σ su S*** (la distribuzione di carica è ***uniforme*** !):

$$\sigma = \Delta Q / \Delta S = \mathbf{Q} / \mathbf{S} = \mathbf{Q} / 4\pi \mathbf{R}^2$$

Per determinare il campo elettrico di un guscio sferico uniformemente carico si procederà suddividendo il problema in due sottoproblemi distinti:

1b) determinazione del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ in punti ***esterni*** al guscio sferico;
2b) determinazione del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ in punti ***interni*** guscio sferico.

1b)Determinazione del campo elettrico **E** in punti ***esterni*** al guscio sferico.

Si comincerà con il determinare ***direzione*** e ***verso*** di $\underline{\mathbf{E}}$ in un punto P esterno al guscio sferico nell'ipotesi che **Q** sia positiva. In primo luogo, la costanza di σ su **S** comporterà che ad ogni elemento di superficie ΔS_i sarà associata una ***carica elettrica costante*** $\Delta Q_i = \sigma\ \Delta S_i = \Delta Q$ pertanto il guscio sferico con carica elettrica **Q** potrà essere considerato come un insieme di cariche puntiformi uguali (con carica ΔQ) disposte su una sfera di raggio R.

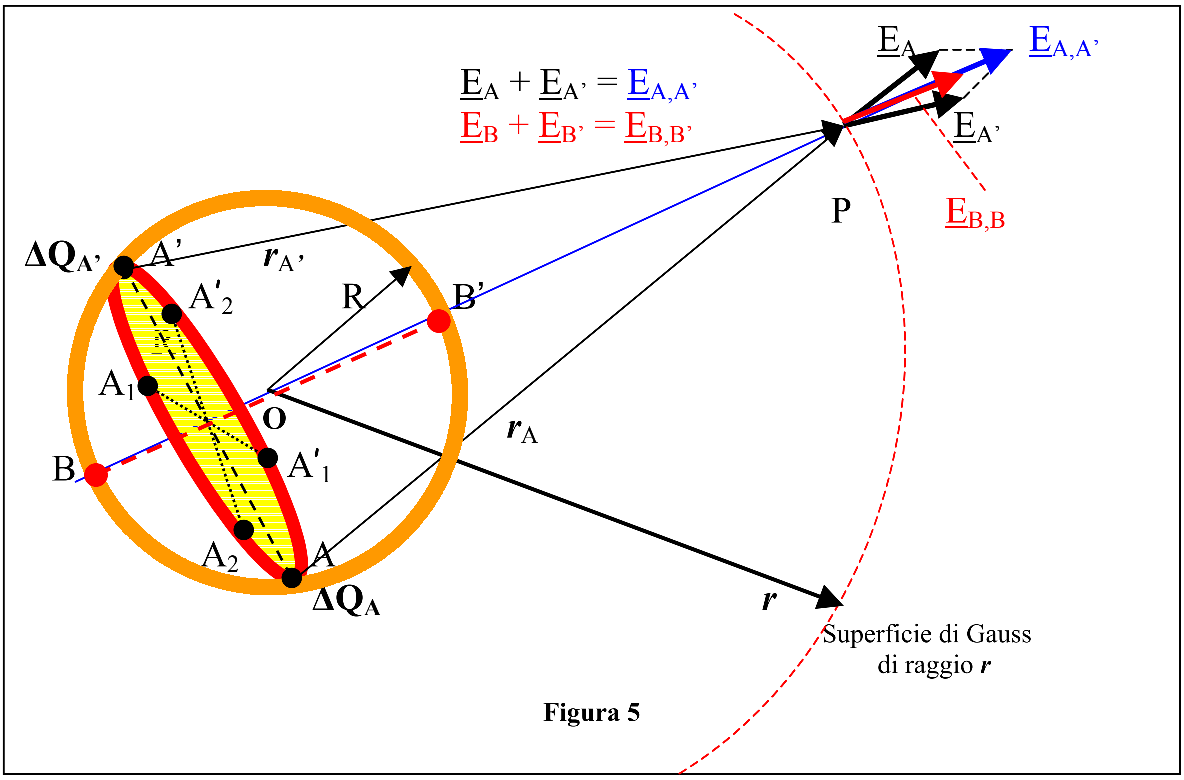


Figura 5

Si consideri un generico punto A della sfera; come si vede dalla Fig. 5, ad esso sarà associata una carica puntiforme ΔQ_A che produrrà in P un campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}_A$. Si costruisca il segmento OP e lo si prolunghi fino al punto B : esso si comporterà da asse di simmetria per la distribuzione sferica di centro O e raggio **R**. In tal modo, per ogni punto A della superficie sferica **S**, sarà sempre possibile trovare un punto A', simmetrico di A, cioè tale che il triangolo AA'P risulti isoscele qualunque sia $A \in \mathbf{S}$. La carica $\Delta Q_A = \Delta Q_{A'}$, associata ad A', produrrà un campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}_{A'}$, con $|\underline{\mathbf{E}}_{A'}| = |\underline{\mathbf{E}}_A|$. I due vettori $\underline{\mathbf{E}}_{A'}$ ed $\underline{\mathbf{E}}_A$, essendo disposti lungo i prolungamenti dei lati obliqui AP ed A'P del triangolo isoscele AA'P, formeranno, a loro volta, un triangolo isoscele la cui risultante $\underline{\mathbf{E}}_{A,A'}$ avrà per direzione la retta che contiene il segmento OP. Potendo ripetere tale costruzione per qualunque scelta del punto A sulla sfera **S**, ogni coppia di punti del tipo (A, A') produrrà un campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}_{A,A'}$ diretto come l'asse del segmento AA' passante per P. Applicando il ***principio di sovrapposizione dei campi elettrici*** (Eq. 9.AI) a tali coppie di punti di **S**, si conclude che il campo elettrico risultante $\underline{\mathbf{E}}$(P) nel punto P avrà ***direzione radiale*** e ***verso uscente*** se $Q > 0$, ***verso entrante*** se $Q < 0$. Si osservi che da tale costruzione risultano esclusi i punti B e B' che sono simmetrici di se stessi (***punti uniti*** nella simmetria assiale di asse OP !) tuttavia essi producono in P i campi elettrici $\underline{\mathbf{E}}_B$ ed $\underline{\mathbf{E}}_{B'}$ che hanno ancora per direzione la retta che contiene il segmento OP. Questa costruzione può essere ripetuta per qualsiasi punto A_1, A_2, … , appartenente alla sfera di raggio r = OP e conduce, in definitiva, al seguente risultato:

il campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ prodotto da un guscio sferico uniformemente carico in un punto P ad esso esterno è a simmetria radiale, cioè è diretto lungo la semiretta che ha origine nel centro della sfera e contiene il punto P nel quale si vuole determinare il campo elettrico. Esso ha, inoltre, verso entrante o uscente a seconda che $Q < 0$ ***o*** $Q > 0$.

La superficie più adatta all'applicazione del teorema di Gauss è, ovviamente, la sfera concentrica alla distribuzione sferica di carica di raggio r = OP (Fig. 5). Come nel caso del campo elettrico prodotto da una carica puntiforme, risulterà

$$\underline{\mathbf{E}}(P) \parallel \underline{\boldsymbol{n}}_P \;\Rightarrow\; \underline{\mathbf{E}}(P) \bullet \underline{\boldsymbol{n}}_P = E_n = |\underline{\mathbf{E}}(P)|$$

dove $\underline{\mathbf{E}}(P)$ ed $\underline{\boldsymbol{n}}_P$ rappresentano, rispettivamente, il campo elettrico nel punto P di $\mathbf{S}$ ed il versore normale alla superficie $\mathbf{S}$ in P. La (4'''.I) diventa allora

$$\Phi_S(\underline{\mathbf{E}}) = |\underline{\mathbf{E}}(P)| \times \mathbf{S} = 4\pi r^2 |\underline{\mathbf{E}}(P)|$$

Dalla (4.I) si ha poi

$$4\pi r^2 |\underline{\mathbf{E}}(P)| = 4\pi k_o \mathbf{Q}$$

ed infine, nell' ipotesi più generale di una carica sorgente $\mathbf{Q}$ arbitraria, si ha:

$$|\underline{\mathbf{E}}(P)| = k_o |\mathbf{Q}| / r^2 \qquad (7.I)$$

La (7.I), formalmente identica alla (5.I), esprime la notevole circostanza che

"il campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ prodotto da un guscio sferico uniformemente carico con carica totale Q e raggio R, nei punti all'<u>esterno</u> della stessa distribuzione, è uguale a quello prodotto, negli stessi punti, da una carica puntiforme Q posta nel centro della stessa distribuzione sferica."

In simboli

Campo elettrico all'***esterno*** di un ***guscio sferico*** di raggio R	$\|\underline{E}(r)\| = k_o \|\mathbf{Q}\| / r^2 \quad (r \geq R)$	(7'.I)

2b) <u>Determinazione del campo elettrico **E** in punti ***interni*** al guscio sferico.</u>

Sulla base di considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte per ottenere la costruzione della (7'.I), è possibile determinare la ***direzione*** ed il ***verso*** del campo elettrico $\underline{E}$ nei punti ***interni*** al guscio sferico di raggio R (Fig. 6).

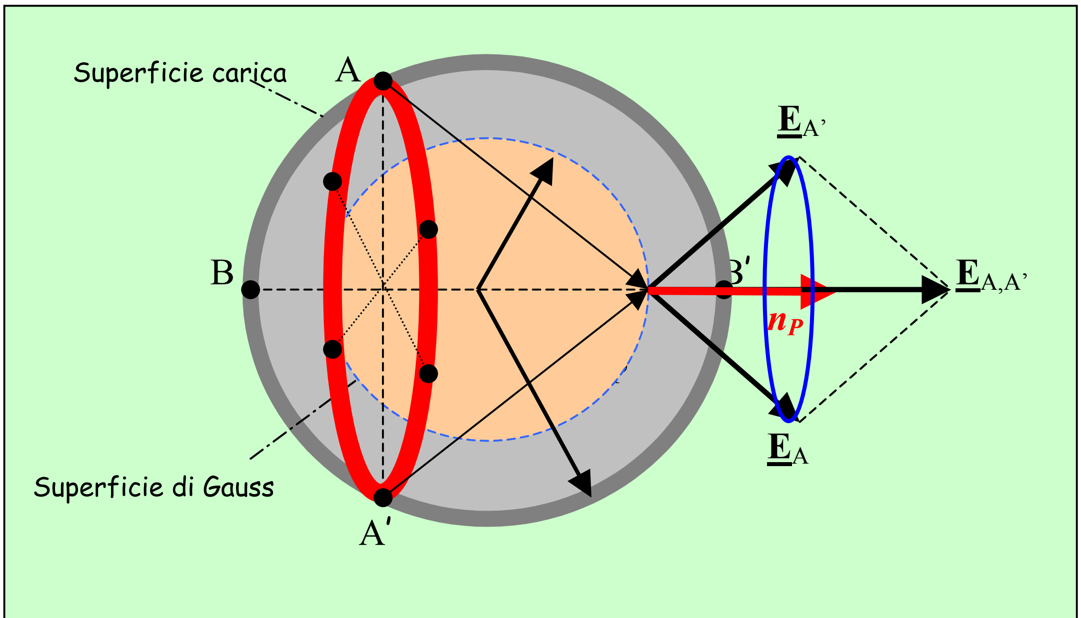


Figura 6

Anche in questo caso si constata "*a vista*" che il campo elettrico $\underline{E}$ è ***radiale***, pertanto è naturale scegliere come superficie di Gauss la sfera ***S'*** concentrica alla distribuzione passante per il punto P nel quale si vuole determinare il campo elettrico. Pertanto, operando come al punto 1), la (4'''.I) diventa allora

$$\Phi_S(\underline{E}) = |\underline{E}| \times \mathbf{S} = \mathbf{4}\,\pi\, r'^{\,2}\, |\underline{E}(P)|$$

Dalla (4.I) si ha poi

$$4\pi\, r'^{\,2}\, |\underline{E}(P)| = 4\pi\, k_o\, \mathbf{Q}_{int}$$

ma $\mathbf{Q}_{int} = 0$ perché la sfera di superficie S' ***non contiene al suo interno alcuna carica elettrica***, quindi si ha $|\underline{E}(P)| = 0$. In definitiva

> ***"il campo elettrico $\underline{E}$ prodotto da una distribuzione carica uniforme a simmetria sferica con carica totale Q e raggio R, nei punti all'<u>interno</u> della stessa distribuzione, è <u>nullo</u>."***

In simboli

Campo elettrico all'***interno*** di un ***guscio sferico*** di raggio R	$\underline{E}(\boldsymbol{r}) = \underline{0}$	$(0 \leq \boldsymbol{r} < R)$	(7".I)

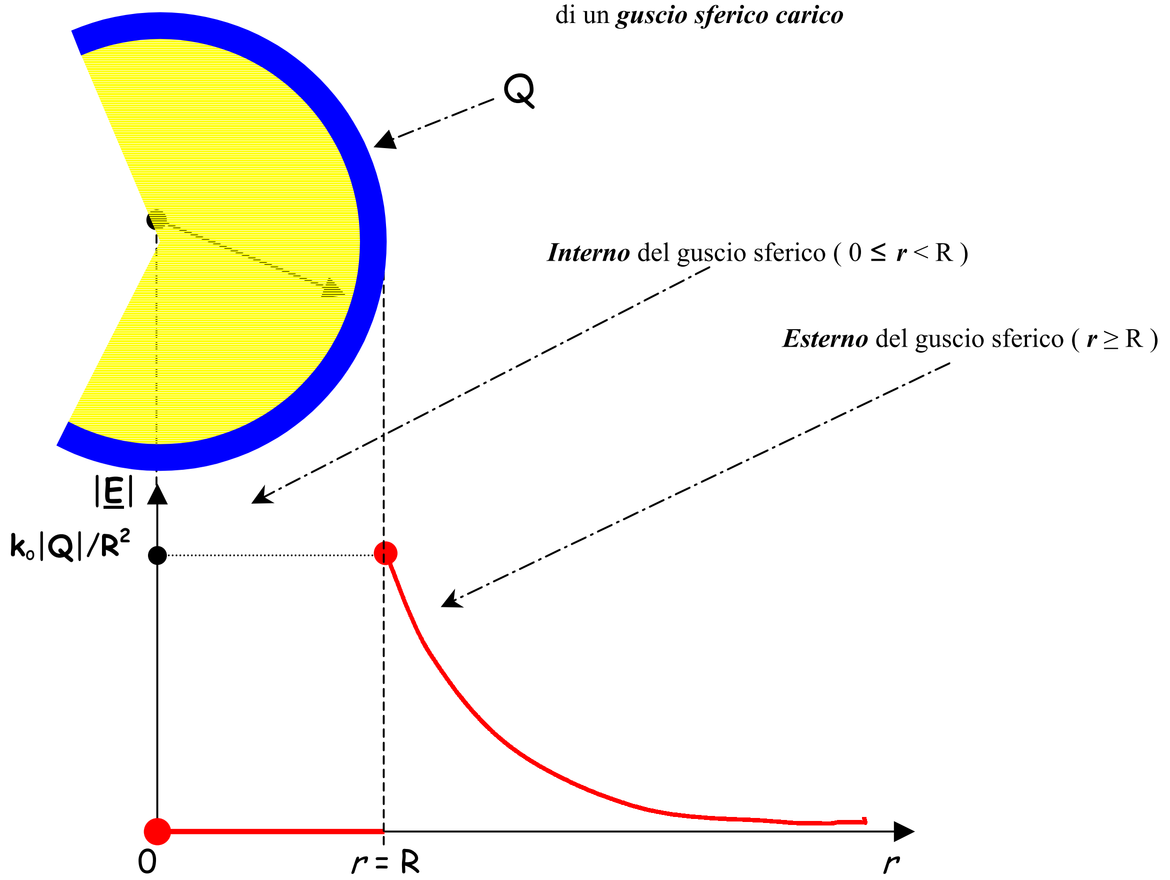
Riassumendo:

Campo elettrico di un ***guscio sferico*** di raggio R

$$|\underline{E}(\boldsymbol{r})| = \begin{cases} k_o\, |\mathbf{Q}| / \boldsymbol{r}^2 & (\boldsymbol{r} \geq R) \\ 0 & (0 \leq \boldsymbol{r} < R) \end{cases}$$

[L'andamento di $|\underline{E}|$ è riassunto nel grafico seguente (Fig. 7)].

Figura 7 : andamento del modulo del campo elettrico $|\underline{E}|$ di un ***guscio sferico carico***



c) Campo elettrico di una sfera piena uniformemente carica.

Sia **Q** una carica elettrica (ad esempio positiva) distribuita ***uniformemente*** in una ***sfera piena di raggio*** R ***e volume*** $\tau = (4/3)\,\pi\,\mathbf{R}^3$. Introdotta la grandezza scalare ***densità volumica di carica elettrica*** ρ definita dalla relazione

$$\rho = \Delta Q / \Delta\tau \qquad (8.I)$$

la quale rappresenta la quantità di carica ΔQ distribuita nel volume elementare $\Delta\tau$ ($[\rho] = [C\ m^{-3}]$), si ha, a causa della ***costanza di*** ρ ***in*** τ (la distribuzione di carica è uniforme !):

$$\rho = \Delta Q/\Delta\tau = Q/\tau = Q/[(4/3)\,\pi\,\mathbf{R}^3\,] \qquad (8'.I)$$

Per la determinazione del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ della sfera piena carica, si procederà allo stesso modo di quanto fatto nel caso del guscio sferico uniformemente carico (caso ***b)***). Si procederà, pertanto, suddividendo il problema in due "sottoproblemi" distinti:

1c) determinazione del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ in punti ***esterni*** alla sfera piena;
2c) determinazione del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ in punti ***interni*** alla sfera piena.

1c) Determinazione del campo elettrico **E** in punti ***esterni*** alla sfera carica piena.

Si osservi, preliminarmente, che ***una sfera carica con densità di carica*** ρ ***uniforme può essere considerata come unione di un numero grandissimo di gusci sferici concentrici uniformemente carichi***.

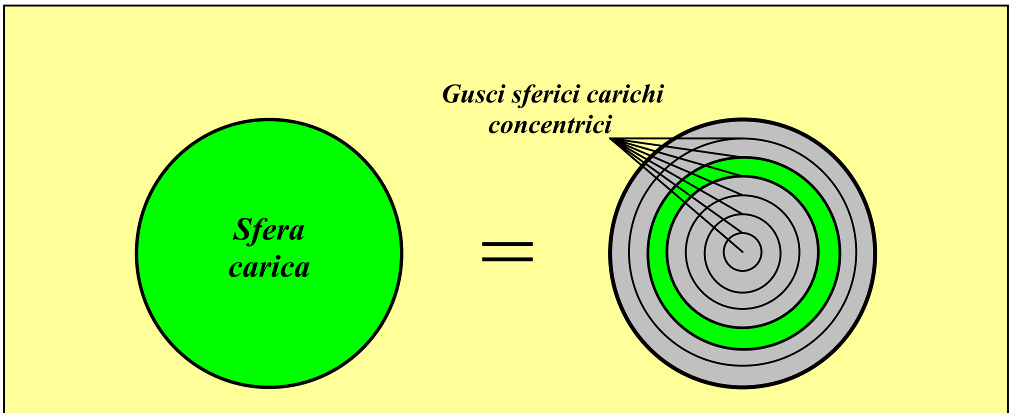


Figura 8

Siano $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ i gusci sferici carichi rispettivamente di raggio $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ e carica $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ in cui è stata suddivisa la sfera uniformemente carica **S** (Fig. 8). Volendo determinare il campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}(P)$ in un punto P esterno, o di frontiera, ad essa, cioè caratterizzato da una distanza ***r*** = OP dal centro O della sfera maggiore o uguale al raggio R del guscio sferico più esterno, si può applicare il ***principio di sovrapposizione dei campi elettrici*** (Eq. 9.AI) eseguendo la somma vettoriale dei campi elettrici $\underline{\mathbf{E}}_1(P)$, $\underline{\mathbf{E}}_2(P)$, $\underline{\mathbf{E}}_3(P), \dots, \underline{\mathbf{E}}_n(P)$, prodotti in P rispettivamente da $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$:

$$\underline{\mathbf{E}}(P) = \underline{\mathbf{E}}_1(P) + \underline{\mathbf{E}}_2(P) + \underline{\mathbf{E}}_3(P) + \dots + \underline{\mathbf{E}}_n(P) = \Sigma_i \underline{\mathbf{E}}_i(P) \qquad (9'.\mathrm{I})$$

L'espressione (8.I) è una somma vettoriale di vettori che, in ogni punto P dello spazio all'esterno di S, risultano ***paralleli e concordi***. Dalla (6') si ha allora

$$|\underline{E}(P)| = \Sigma_i |\underline{E}_i(P)| = \Sigma_i k_o Q_i / r_i^{\,2} = k_o (\Sigma_i Q_i) / r^{\,2} = k_o \mathbf{Q} / r^{\,2} \qquad (9''.I)$$

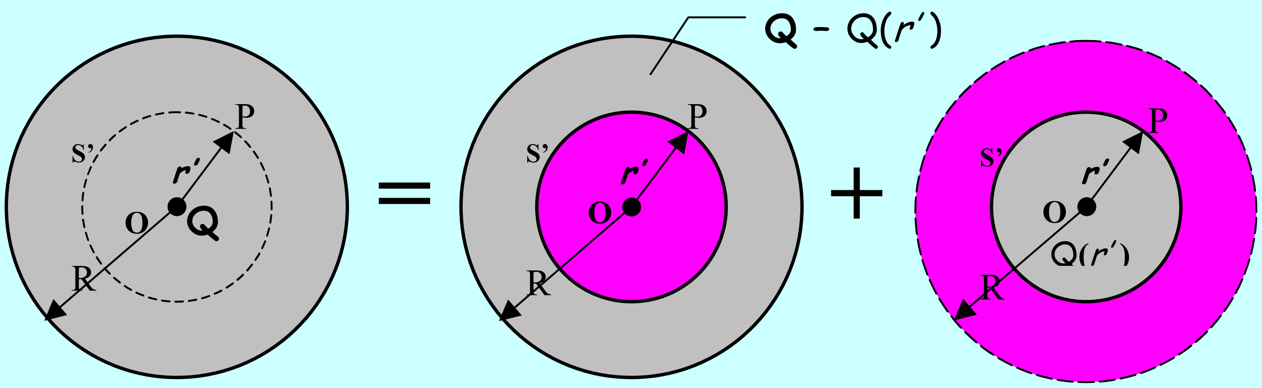
dove si è posto $r_i = r = OP$, in quanto r_i rappresenta la distanza di P dal centro dell'***i***- esimo guscio sferico carico e tutti i gusci sono ***concentrici***, ed, inoltre, $\Sigma_i Q_i = \mathbf{Q}$ è la carica elettrica totale della sfera piena. In base alla (9''.I) si può affermare allora che

> ***"il campo elettrico*** $\underline{E}$(P) ***prodotto da una distribuzione di carica sferica ed uniforme con carica totale*** Q ***e raggio*** R, ***in un punto*** P ***<u>esterno</u> alla stessa distribuzione, è uguale a quello prodotto, nello stesso punto, da una carica puntiforme*** Q ***posta nel centro della stessa distribuzione sferica."***

In simboli, nell' ipotesi più generale di una carica sorgente **Q** arbitraria:

Campo elettrico all'***esterno*** di una ***sfera carica piena***	$|\underline{E}| = k_o |\mathbf{Q}| / r^{\,2} \quad (r \geq R)$	(10.I)

<u>2c) Determinazione del campo elettrico **E** in punti ***interni*** alla sfera carica piena.</u>



Sfera carica di raggio R *e carica elettrica totale* **Q** = *Guscio sferico di raggio interno r' e carica elettrica* **Q** - Q(r') + *Sfera carica di raggio r' e carica elettrica* Q(r')

Si consideri un punto P interno alla sfera **S** carica uniformemente con carica **Q**, e sia ***r'*** = OP < R la sua distanza dal centro O della stessa sfera. Si consideri, ora, la sfera S' con centro in O e raggio ***r'*** alla quale, ovviamente, appartiene P. L'esame della Fig. 9 suggerisce di considerare questa distribuzione di carica come formata da

1. una sfera di raggio ***r'*** e carica Q(***r'***) ([5]) data da

$$Q(r') = \rho\ \tau(r') = (4/3)\ \pi\ \rho\ r'^{3}$$

   con τ (***r'***) volume della sfera di raggio ***r'***;

2. un guscio sferico di raggio interno ***r'***, raggio esterno R e carica **Q** – Q(***r'***).

Indicati con $\underline{\mathbf{E}}_{guscio}(P)$ ed $\underline{\mathbf{E}}_{sfera}(P)$ i campi elettrici prodotti in P, dal guscio sferico carico e dalla sfera carica di raggio ***r'***, rispettivamente, utilizzando il ***principio di sovrapposizione dei campi elettrici*** e le (7'.I) e (7".I), si ha :

$$\underline{\mathbf{E}}(P) = \underline{\mathbf{E}}_{guscio}(P) + \underline{\mathbf{E}}_{sfera}(P) = \underline{\mathbf{0}} + \underline{\mathbf{E}}_{sfera}(P) = \underline{\mathbf{E}}_{sfera}(P)$$

Pertanto

$$|\underline{\mathbf{E}}(P)| = |\underline{\mathbf{E}}_{sfera}(P)| = k_o\,\mathbf{Q}(r')\ /\ r^{2} = k_o(4/3)\ \pi\ \rho\ r'^{3}\ /\ r'^{2} = $$
$$= (4/3)\ k_o\ \pi\ \rho\ r' \qquad (r \geq R)$$

In definitiva, nell'ipotesi più generale di ρ uniforme ma di segno arbitrario, si ha :

Campo elettrico all'***interno*** di una ***sfera carica piena***	$|\underline{\mathbf{E}}(r')| = (4/3)\ k_o\ \pi\ |\rho|\ r' \quad (0 \leq r' < R)$	(11.I)

Come si vede, il campo elettrico all'interno della sfera ***cresce linearmente*** con la distanza dal centro della sfera, annullandosi nel centro ($\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{0}}$ quando ***r'*** = 0) e raccordandosi in superficie con il valore del campo elettrico all'esterno, cioè:

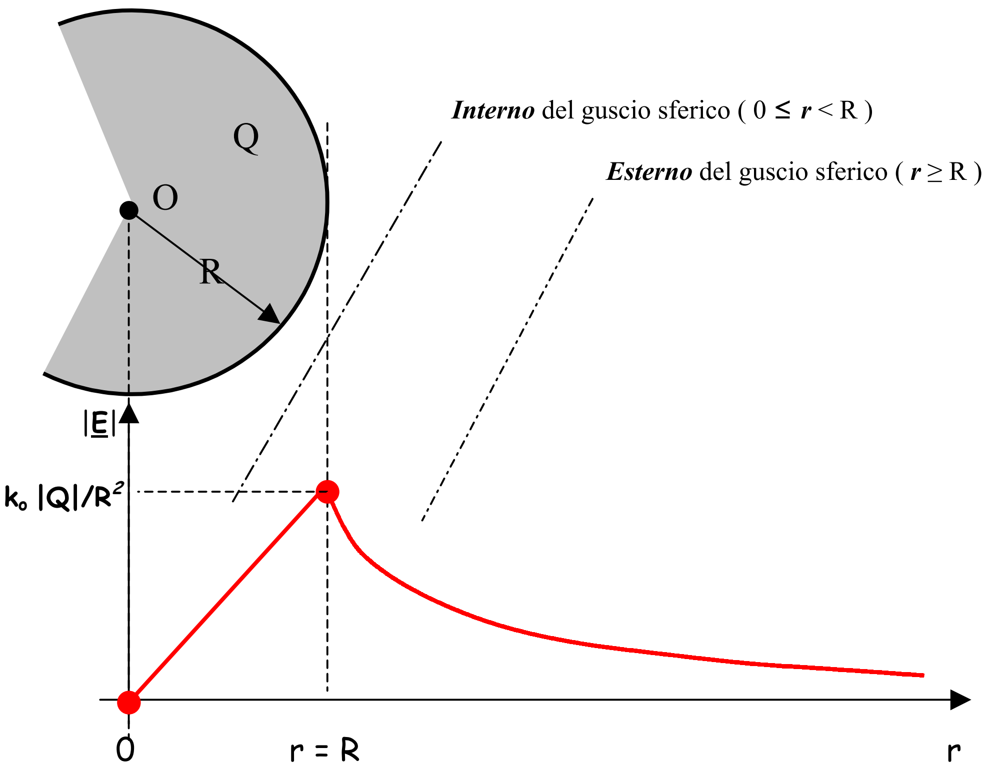
[5] La scrittura Q(***r'***) sta ad indicare che la carica elettrica contenuta nella sfera di raggio ***r'*** è funzione di ***r'***.

$$|\underline{\mathbf{E}}_{\,interno}(r' = R)| = (4/3)\, k_o\, \pi\, |\rho|\, R = = (4/3)\, k_o\, \pi\, [|\mathbf{Q}|/(4/3)\pi R^3]\, R =$$
$$= k_o\, |\mathbf{Q}| \,/\, R^2 = |\underline{\mathbf{E}}_{\,esterno}(r' = R)|$$

Campo elettrico di una ***sfera piena uniformemente carica***	$$|\underline{E}| = \begin{cases} k_o\, |Q| \,/\, r^2 & (r \geq R) \\ (4/3)\, k_o\, \pi\, |\rho|\, r' & (0 \leq r' < R) \end{cases}$$

[L'andamento di $|\underline{E}|$ è riassunto nel grafico seguente (Fig. 10).]

Figura 10 : andamento del modulo del campo elettrico $|\underline{\mathbf{E}}|$ di una ***sfera piena uniformemente carica.***



(I - continua)