Appendice II :
Significato fisico ed importanza del Teorema di Gauss.

Il ***TdG*** è stato ricavato utilizzando il fatto che il campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$(P) prodotto da una carica puntiforme **Q** , posta nel punto O, in un generico punto dello spazio P, a distanza $\boldsymbol{r}$ da **Q**, sia ***inversamente proporzionale al quadrato della distanza r***, ovvero

$$|\underline{\mathbf{E}}(\boldsymbol{r})| = k_o\, |\mathbf{Q}| \,/\, \boldsymbol{r}^{2} \qquad (1.\mathrm{AI})$$

Per comprendere l'importanza di questa circostanza, si può supporre, ad esempio, che la forza elettrica fra due cariche puntiformi **Q** e **q**, poste a reciproca distanza $\boldsymbol{r}$, sia data dalla seguente espressione

$$|\underline{\mathbf{F}}_{\delta,q}| = k_o\, |\mathbf{Q}|\; |\mathbf{q}| \,/\, \boldsymbol{r}^{2+\delta} \qquad (1.\mathrm{AII})$$

dove l'indice δ ($\neq 0$) tiene conto di quanto l'espressione (1.AII) adottata per la forza elettrica si discosti dalla "canonica" legge di Coulomb dell'inverso del quadrato della distanza ([1]).E' facile dimostrare che, in questo caso, il campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}_\delta$(P) prodotto dalla carica puntiforme **Q** , posta in O, nel generico punto P a distanza $\boldsymbol{r}$ da O è dato da

$$|\underline{\mathbf{E}}_\delta(\boldsymbol{r})| = k_o\, |\mathbf{Q}| \,/\, \boldsymbol{r}^{2+\delta} \qquad (2.\mathrm{AII})$$

Sia ora $\underline{E}_\delta$***** il campo elettrico prodotto da **Q** sulla superficie caratterizzata dalla condizione $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_*$, ovvero sulla sfera **S *** con centro in O, raggio $\boldsymbol{r}_*$ ed area $\mathbf{S^*} = 4\,\pi\, \boldsymbol{r}_*^{\,2}$. Il calcolo del ***flusso totale*** $\Phi_S(\underline{\mathbf{E}})$ ***attraverso*** **S *** mediante la (3.I) è immediato, dato che la direzione ed il verso di $\underline{\mathbf{E}}$ in ogni punto di **S *** coincidono con quelli della normale esterna $\underline{\boldsymbol{n}}$ ad **S *** in quel punto (Fig. 3). Si ha allora:

---

[1] : Infatti, se $\delta = 0$ la (1.AII) si riduce alla legge di Coulomb.

$$\Phi_S(\underline{E}_\delta) = |\underline{E}_\delta^*| \times \boldsymbol{S^*} \quad [\, k_o\, |\mathbf{Q}| \,/\, r_*^{2+\delta}\,] \times 4\,\pi\, r_*^{\,2} \;= 4\,\pi\, k_o\, |\mathbf{Q}| \,/\, r_*^{\,\delta} \qquad (3.AII)$$

E' immediato constatare dalla (3.AII) che il flusso del campo elettrico dipende, oltre che dalla carica **Q** contenuta in ***S****, anche dalla superficie di Gauss adoperata per calcolarlo, in particolare dal raggio r_*.
Discende da ciò immediatamente che ***il TdG nella forma*** (8.AI) ***non risulta più valido finchè non si pone***

$$\delta = 0 \qquad (4.AII)$$

nella (1.AII) ***o, equivalentemente, nella*** (2.AII).

Pertanto

le verifiche sperimentali delle previsioni del TdG non sono altro che notevolissime prove indirette della validità della condizione (4.AII), ***ovvero della validità della Legge di Coulomb dell'inverso del quadrato della distanza.***

Sulla base dei risultati sperimentali (ad es.: J.E. Faller, H.A. Hill e E.R. Williams, 1971) si può oggi affermare che ***la condizione (4.AII) è verificata a meno di una parte su 10^16^.***

ARGOMENTO DI APPROFONDIMENTO: FINO A QUALI DISTANZE VALE LA LEGGE DI COULOMB ?
Per quanto riguarda le distanze microscopiche, la validità della legge di Coulomb è stata esplorata osservando le modalità con le quali due elettroni si urtano quando vengono lanciati l'uno contro l'altro con quantità di moto $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ e $\mathbf{p}' = m\,\mathbf{v}'$ opposte. In particolare, più è grande la quantità di moto (in modulo !) e più è grande la sua energia **E** ([2]) e, quindi, più breve è la distanza alla quale essi arrivano l'uno dall'altro. Esperimenti di questo tipo realizzati con elettroni da 25 GeV hanno mostrato che la legge di Coulomb vale rigorosamente fino a distanze di 10^{-18} m (!).

---

[2] : trattandosi di particelle che si muovono con velocità vicine a quella della luce, vale la relazione relativistica $\mathbf{p} = \mathbf{v}\,E\;/c^2$.