Appendice I : Dimostrazione del Teorema di Gauss.

In questa sezione si procederà ad una dimostrazione "induttiva" del ***TdG*** procedendo dal caso più semplice (carica puntiforme al centro di una superficie sferica) a quello più generale (distribuzione di carica generica contenuta in una supeficie chiusa $\mathcal{S}$ di forma arbitraria).

1.AI Il *TdG* per una carica sorgente **Q** puntiforme.

Si consideri una singola carica puntiforme positiva **Q** posta nel punto *O;* essà produce in un generico punto dello spazio P, posto a distanza $\boldsymbol{r}$ da **Q**, un campo elettrico ***radiale*** di modulo

$$|\mathbf{E}(\boldsymbol{r})| = \quad k_o\,|\mathbf{Q}|\;/\;\boldsymbol{r}^{2} \qquad (1.AI)$$

E' immediato rendersi conto che ad ogni punto dello spazio $P \in \mathbf{R}^3 - \{O\}$ è associato un dato valore di $|\underline{\mathbf{E}}|$; tuttavia esistono superfici in ciascun punto delle quali il campo elettrico presenta uno stesso valore costante del proprio modulo. Nel caso in esame $|\underline{\mathbf{E}}| = |\underline{\mathbf{E}}^*| = k_o\,|\mathbf{Q}|\;/\;\boldsymbol{r}_*^{2}$ sulla superficie caratterizzata dalla condizione $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_*$, ovvero sulla sfera $\mathcal{S}^*$ con centro in **Q**, raggio $\boldsymbol{r}_*$ ed area $\mathbf{S^*} = 4\,\pi\,\boldsymbol{r}_*^{2}$. Il calcolo del ***flusso totale*** $\Phi_S(\underline{\mathbf{E}})$ ***attraverso*** $\mathcal{S}^*$ mediante la (3.I) è immediato, dato che la direzione ed il verso di $\underline{\mathbf{E}}$ in ogni punto di $\mathcal{S}^*$ coincidono con quelli della normale esterna $\underline{\boldsymbol{n}}$ ad $\mathcal{S}^*$ in quel punto (Fig. 3). Si ha allora:

$$\Phi_S(\underline{\mathbf{E}}) = |\underline{\mathbf{E}}^*| \times \mathbf{S^*} = \;[\,k_o\,|\mathbf{Q}|\;/\;\boldsymbol{r}_*^{2}\,] \times 4\,\pi\,\boldsymbol{r}_*^{2} = \;4\,\pi\;k_o\,|\mathbf{Q}| \qquad (2.AI)$$

La (2.AI) esprime la notevole circostanza che $\Phi_S(\underline{\mathbf{E}})$ ***non dipende*** dalle dimensioni della sfera $\mathcal{S}^*$ e, nell' ipotesi più generale di una carica sorgente puntiforme **Q** di segno arbitrario, esso è dato da

Flusso totale $\Phi_S(\underline{\mathbf{E}})$ del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ attraverso una qualsiasi sfera chiusa $\mathcal{S}^*$ centrata su **Q** :

$$\Phi_S(\underline{\mathbf{E}}) = \quad 4\,\pi\;k_o\,\mathbf{Q} \qquad (3.AI)$$

Si consideri ora una seconda superficie Σ^* di forma qualsiasi che racchiuda $\mathcal{S}$ * e che ***non sia sferica.*** Si vuol dimostrare nel seguito che il flusso totale $\Phi_\Sigma(\underline{\mathbf{E}})$ di $\underline{\mathbf{E}}$ attraverso Σ^* è ancora rappresentato dalla (3.AI). Per verificare tale circostanza, si prenderà in esame lo spicchio sferico, con vertice in O, che tagli una piccola porzione $\Delta\mathbf{S}(\boldsymbol{r})$ della superficie di $\mathcal{S}$ *, a distanza $\boldsymbol{r}$ da **Q** (Fig. 1.A). A causa delle sue ridotte dimensioni, $\Delta\mathbf{S}(\boldsymbol{r})$ può ritenersi piana e lo spicchio sferico di vertice O è assimilabile ad una ***piramide retta di altezza*** $\boldsymbol{r}$ = OP ***e base*** $\Delta\mathbf{S}(\boldsymbol{r})$.

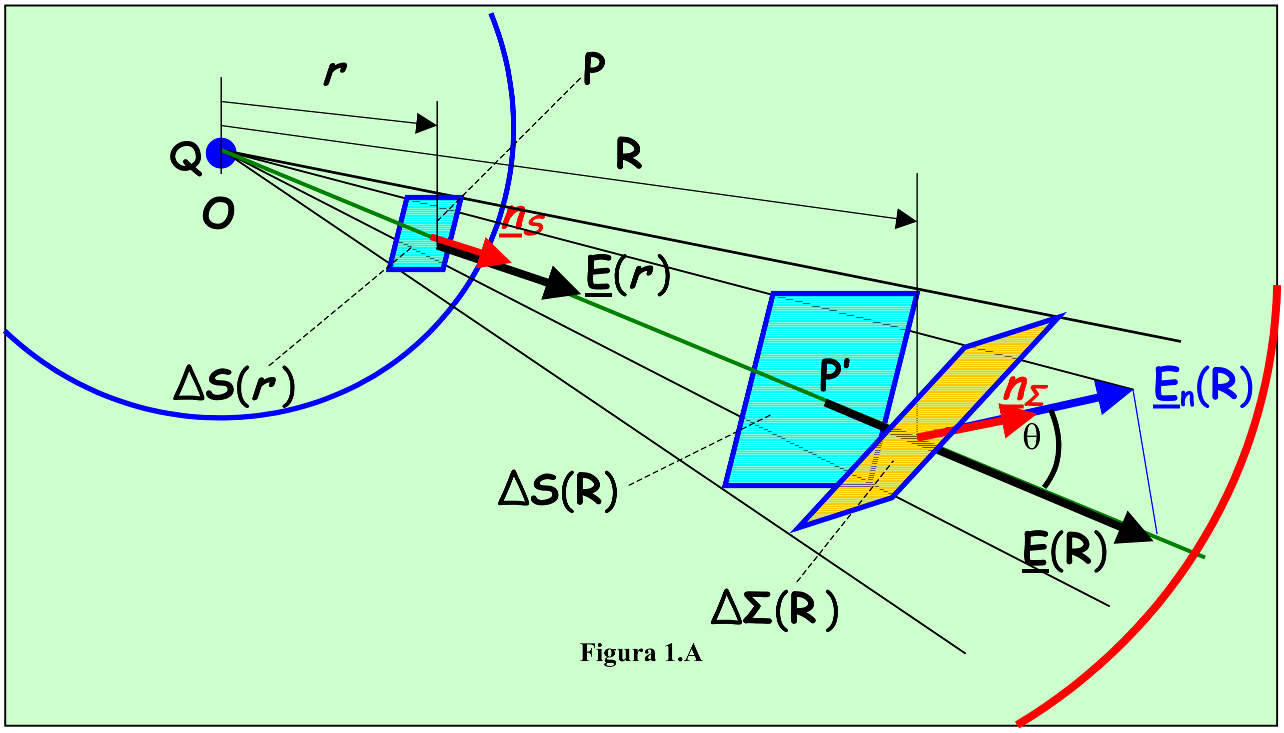

Figura 1.A

Proseguendo, lo stesso spicchio intercetterà la porzione $\Delta\Sigma(\mathbf{R})$ sulla superficie più esterna Σ^*, posta a distanza **R** dalla carica **Q** ed orientata secondo la normale $\underline{\boldsymbol{n}}_\Sigma$. A causa delle ridotte dimensioni di $\Delta\mathbf{S}(\boldsymbol{r})$, anche $\Delta\Sigma(\mathbf{R})$ risulterà essenzialmente piana e, quindi, lo spicchio di vertice O e base $\Delta\Sigma(\mathbf{R})$ sarà, con ottima approssimazione, una piramide di base $\Delta\Sigma(\mathbf{R})$. Tuttavia tale piramide, stante l'arbitrarietà dell'orientazione della propria base, individuata dal vettore $\underline{\boldsymbol{n}}_\Sigma$, non risulterà necessariamente retta dato che non è detto che si verifichi la condizione $\Delta\Sigma(\mathbf{R}) \perp$ OP'. Risulterà, invece, retta la piramide di altezza **R** e base Δ**S**(**R**), dove Δ**S**(**R**) è la ***proiezione di*** $\Delta\Sigma$(**R**) ***sul piano tangente alla sfera di raggio OP' = R nel punto*** P'.Qual è la relazione fra le due aree Δ**S**(***r***), anche $\Delta\Sigma$(**R**) risulterà e $\Delta\Sigma$(**R**) ?

In primo luogo, l'area della superficie Δ**S**(**R**) è maggiore dell'area della superficie Δ**S**(***r***) perché quest'ultima si trova ad una distanza ***r*** = OP da O minore della distanza OP'. Più in particolare, utilizzando un "noto" teorema di geometria solida sulle piramidi ([1]) si ottiene :

$$\Delta \mathbf{S}(\mathbf{R}) / \Delta \mathbf{S}(\boldsymbol{r}) = (\mathbf{R} / \boldsymbol{r})^2 \Rightarrow \Delta \mathbf{S}(\mathbf{R}) = \Delta \mathbf{S}(\boldsymbol{r}) (\mathbf{R} / \boldsymbol{r})^2 \qquad (4.AI)$$

In secondo luogo, a causa dell'inclinazione di $\Delta\Sigma$(**R**) rispetto a Δ**S**(**R**), che determina l'angolo θ fra la normale esterna $\underline{\boldsymbol{n}_\Sigma}$ e la direzione radiale passante per P', si ha

$$\Delta \mathbf{S}(\mathbf{R}) = \Delta\Sigma(\mathbf{R}) \cos\theta \Rightarrow \Delta\Sigma(\mathbf{R}) = \Delta \mathbf{S}(\mathbf{R}) / \cos\theta \qquad (5.AI)$$

che, utilizzando la (4.AI), fornisce l'ulteriore relazione

$$\Delta\Sigma(\mathbf{R}) = \Delta \mathbf{S}(\mathbf{R}) / \cos\theta \qquad (6.AI)$$

Per quanto riguarda, invece, il flusso $\Delta\Phi_\Sigma$ del campo elettrico $\underline{\mathbf{E}}$ attraverso $\Delta\Sigma$(**R**), sostituendo le precedenti relazioni nella (1.I), si ha

[1] "Se si taglia una piramide P di vertice O con un piano π' parallelo al piano di base π , le superfici del poligono di base S$\in\pi$ e di sezione S'$\in\pi$' sono proporzionali ai quadrati delle distanze d e d', rispettivamente, di O da π e di O da π'."

$$\Delta\Phi_\Sigma(\underline{E}) = \underline{E}(P') \bullet \underline{n_\Sigma}\,\Delta\Sigma(R) \quad = |\underline{E}(P')|\,|\underline{n_\Sigma}|\,\Delta\Sigma(R)\cos\theta =$$

$$= [\,k_o\,|Q|\;/\;R^2\,] \times [\Delta S(R)\,/\cos\theta] \times \cos\theta\; =$$

$$= [\,k_o\,|Q|\;/\;R^2\,] \times [\Delta S(r)\,(\,R\;/\;r\,)^2\,] =$$

$$= [\,k_o\,|Q|\;/\;r^{\,2}\,] \times \Delta S(r) =$$

$$= \Delta\Phi_S(\underline{E}) \qquad (7.AI)$$

La (7.AI) dimostra che

i flussi $\Delta\Phi_\Sigma(\underline{E})$ e $\Delta\Phi_S(\underline{E})$ del campo elettrico $\underline{E}$ prodotto dalla carica puntiforme Q posta in O, attraverso le due porzioni di superficie corrispondenti $\Delta S(R)$ e $\Delta\Sigma(R)$, sono uguali.

Ogni porzione della superficie esterna Σ^* può, quindi, essere messa in ***corrispondenza biunivoca*** con una porzione della superficie sferica $\mathcal{S}^*$, per cui i flussi totali $\Phi_\Sigma(\underline{E})$ e $\Phi_S(\underline{E})$, ottenuti applicando la (3.I), devono risultare uguali perché somme degli addendi $\Delta\Phi_\Sigma(\underline{E})$ e $\Delta\Phi_S(\underline{E})$, rispettivamente, uguali, ovvero utilizzando la (3.AI)

$$\Phi_\Sigma(\underline{E}) = \Phi_S(\underline{E}) = 4\pi\; k_o\,Q$$

Ma, dato che la superficie Σ^* ***ha forma e dimensioni arbitrarie,*** si può concludere che

Il flusso $\Phi_\Sigma(\underline{E})$ del campo elettrico $\underline{E}$ attraverso una superficie qualsiasi Σ^* che racchiuda una carica puntiforme Q è uguale a $4\pi\, k_o Q$.

In simboli:

Flusso del campo elettrico $\Phi_\Sigma(\underline{E})$ ***attraverso una superficie*** Σ^* ***qualsiasi prodotto da una carica puntiforme Q***	$\Phi_\Sigma(\underline{E}) = 4\pi k_o \mathbf{Q} \quad \forall\Sigma^* \in \mathbf{R}^3 : \mathbf{Q} \in \Sigma^*$	(8.AI)

2.AI Il *TdG* per una distribuzione di carica non puntiforme.

Nel caso in cui la sorgente sia costituita da più cariche puntiformi, il campo elettrico complessivo $\underline{\mathbf{E}}_{ris}$ sarà determinato mediante il ***principio di sovrapposizione dei campi elettrici*** :

> ***Principio di sovrapposizione dei campi elettrici***
>
> ***Il campo elettrico risultante*** $\underline{E}_{ris}(P)$ ***prodotto in un punto*** P ***dello spazio dalle*** n ***sorgenti puntiformi*** Q_1 ***posta in*** P_1, Q_2 ***posta in*** $P_2, \ldots,$ Q_n ***posta in*** P_n ***è dato dalla somma vettoriale dei campi elettrici*** $\underline{E}_1(P)$, $\underline{E}_2(P)$, …, $\underline{E}_n(P)$ ***prodotti, rispettivamente, da ciascuna delle sorgenti*** Q_1, Q_2, …, Q_n ***nel punto*** P.

In simboli :

Campo elettrico risultante $\underline{E}_{ris}(P)$ ***prodotto in un punto P dello spazio dalle n sorgenti puntiformi*** Q_1, Q_2, …, Q_n	$\underline{E}_{ris}(P) = \underline{E}_1(P) + \underline{E}_2(P) + \ldots + \underline{E}_n(P) = \Sigma_i\, \underline{E}_i(P)$	(9.AI)

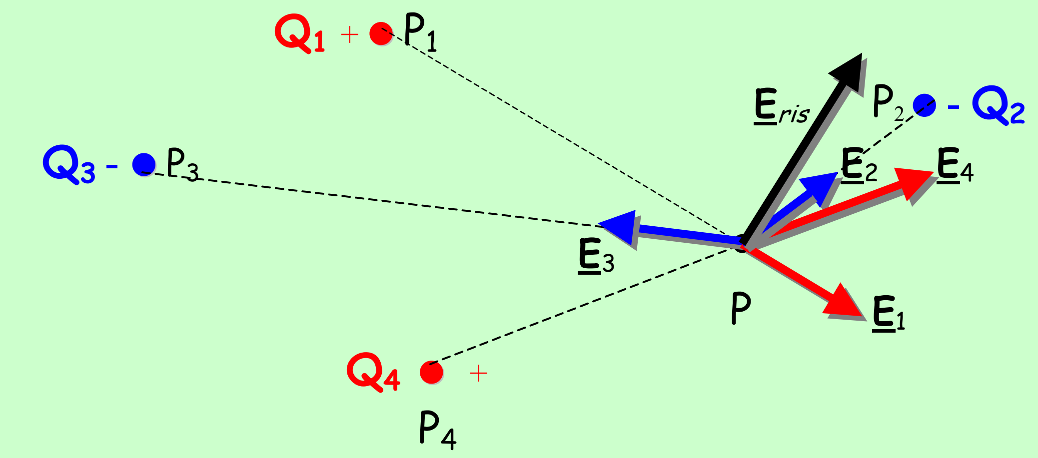

Figura 2.A

In questo caso il flusso $\Delta\Phi_\Sigma(\underline{\mathbf{E}}_{ris})$ del campo elettrico risultante $\underline{\mathbf{E}}_{ris}$ attraverso $\Delta\Sigma(\mathbf{R})$ sarà dato dalla (1.I) :

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi_\Sigma(\underline{\mathbf{E}}_{ris}) &= \underline{\mathbf{E}}(P) \bullet \underline{\boldsymbol{n}}_\Sigma\, \Delta\Sigma(\mathbf{R}) = [\, \underline{\mathbf{E}}_1(P) + \underline{\mathbf{E}}_2(P) + \dots + \underline{\mathbf{E}}_n(P)] \bullet \underline{\boldsymbol{n}}_\Sigma\, \Delta\Sigma(\mathbf{R}) = \\
&= [\, \underline{\mathbf{E}}_1(P) \bullet \underline{\boldsymbol{n}}_\Sigma\, \Delta\Sigma(\mathbf{R})\,] + [\, \underline{\mathbf{E}}_2(P) \bullet \underline{\boldsymbol{n}}_\Sigma\, \Delta\Sigma(\mathbf{R})\,] + \dots + \\
&+ [\, \underline{\mathbf{E}}_1(P) \bullet \underline{\boldsymbol{n}}_\Sigma\, \Delta\Sigma(\mathbf{R})\,] = \\
&= \Delta\Phi_\Sigma(\underline{\mathbf{E}}_1) + \Delta\Phi_\Sigma(\underline{\mathbf{E}}_2) + \dots + \Delta\Phi_\Sigma(\underline{\mathbf{E}}_n) \quad (^2) \qquad (10.AI)
\end{aligned}$$

Ripetendo il discorso fatto nel paragrafo 1.AI, si ottiene la (8.AI) per ciascuno degli addendi della (10.AI) :

$$\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\underline{\mathbf{E}}) = \Phi_\Sigma(\underline{\mathbf{E}}_1) + \Phi_\Sigma(\underline{\mathbf{E}}_2) + \dots + \Phi_\Sigma(\underline{\mathbf{E}}_n) &= 4\,\pi\, k_o\,[\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \dots + \mathbf{Q}_n] \\
&= 4\,\pi\, k_o\, \boldsymbol{\Sigma}_i\, \mathbf{Q}_i \qquad (11.AI)
\end{aligned}$$

---

2 : Si deve osservare esplicitamente che la (10.AI) è stata ottenuta sfruttando la ***proprietà distributiva del prodotto scalare rispetto alla somma vettoriale***.

Posto

$$\mathbf{Q}_{\text{int}} = \boldsymbol{\Sigma}_i \, \mathbf{Q}_i$$

che rappresenta la carica totale contenuta nella superficie chiusa Σ***,** il ***TdG*** si enuncia nel modo seguente :

TEOREMA DI GAUSS :

" ***Il flusso*** $\Phi_\Sigma(\underline{E})$ ***del campo elettrico*** $\underline{E}$***, nel vuoto, attraverso una*** ***qualunque superficie chiusa*** Σ***** ***che racchiuda una carica elettrica*** Q_{int} ***è uguale a*** $4\,\pi\,k_o\,\mathbf{Q}_{\text{int}}$."

In simboli:

$$\Phi_\Sigma(\underline{E}) = 4\,\pi\,k_o\,\mathbf{Q}_{int} \qquad (12.AI)$$

E' importante notare che la (12.AI) è generalizzabile a ***distribuzioni continue*** ed ***infinite di carica***.